

## Príprava na skúšku

### Úloha č. 4: Úplné vrcholové farbenia

Nech  $k \geq 1$  je prirodzené číslo. Pod (*vrcholovým*) *k*-farbením neorientovaného grafu rozumieme zobrazenie, ktoré každému vrcholu grafu priradí číslo – takzvanú *farbu* – z množiny  $\{0, \dots, k-1\}$  tak, aby všetky hrany v grafe viedli medzi vrcholmi s rôznymi farbami. Pre graf s množinou vrcholov  $V$  teda ide o zobrazenie  $f: V \rightarrow \{0, \dots, k-1\}$  také, že  $f(u) \neq f(v)$  kedykoľvek v grafe vedie hrana z vrcholu  $u$  do vrcholu  $v$ . Pre grafy so slučkami teda špeciálne neexistuje žiadne *k*-farbenie bez ohľadu na  $k$ .

Vrcholové *k*-farbenie neorientovaného grafu ďalej nazveme *úplným*, ak pre každú dvojicu rôznych farieb z množiny  $\{0, \dots, k-1\}$  existuje v danom grafe hrana, ktorej koncové vrcholy sú ofarbené týmito dvoma farbami. *Achromatickým číslom* neorientovaného grafu bez slučiek potom nazveme *najväčšie k* také, že existuje úplné vrcholové *k*-farbenie daného grafu.<sup>1</sup>

Pod (úplným) vrcholovým farbením rozumieme (úplné) vrcholové *k*-farbenie pre nejaké ľubovoľné  $k \geq 1$ .

Priložený ZIP archív obsahuje balík `graphs` a v ňom všetky triedy pre grafy z prednášky, ako aj kostru triedy `CompleteColourings`. Doprogramujte do triedy `CompleteColourings` konštruktor, ktorý ako vstup dostane neorientovaný graf bez slučiek `g` a nájde preň:

- Všetky úplné vrcholové farbenia grafu `g` (napríklad pomocou prehľadávania s návratom).
- Achromatické číslo grafu `g` (napríklad skúmaním počtov farieb v jednotlivých nájdených úplných farbieniach).

Ďalej implementujte telá nasledujúcich dvoch metód:

- Metódy `getCompleteColourings`, ktorá vráti úplné vrcholové farbenia nájdené konštruktorom v podobe nemodifikovateľného zoznamu nemodifikovateľných zoznamov celých čísel. Každé úplné vrcholové farbenie grafu o  $n$  vrcholoch má byť reprezentované nemodifikovateľným zoznamom celých čísel dĺžky  $n$ , ktorý pre  $v = 0, \dots, n-1$  obsahuje na  $v$ -tej pozícii farbu priradenú daným farbením vrcholu  $v$ . Výstupom metódy má potom byť nemodifikovateľný zoznam všetkých takýchto zoznamov reprezentujúcich jednotlivé úplné vrcholové farbenia. Úplné farbenia môžu byť vo výstupnom zozname uvedené v ľubovoľnom poradí, avšak každé z nich by malo byť prvkom tohto zoznamu práve raz.
- Metódy `getAchromaticNumber`, ktorá vráti achromatické číslo grafu vypočítané v konštruktoze.

V prípade potreby môžete v triede `CompleteColourings` implementovať aj ďalšie pomocné metódy, deklarovať premenné, či importovať ďalšie (štandardné) balíky.

Na testovač odovzdávajte iba súbor `CompleteColourings.java` obsahujúci zdrojový kód vami doplnenej triedy.

---

<sup>1</sup>Evidentne ide o kladné prirodzené číslo, ktoré nikdy nemôže byť väčšie, než počet vrcholov grafu.